Université Paris Dauphine
2025-2026

Introduction aux séries temporelles
TD1 - Processus stationnaires

Exercice 1 (Stationnarité et stationnarité stricte) Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$, et $Y = X\mathbf{1}_{U=1} - X\mathbf{1}_{U=0}$ où U est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X.

1. Montrer que X et Y ont même loi;
2. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes;
3. En déduire un processus qui est bruit blanc (faible) mais pas bruit blanc fort.

Exercice 2 (Marche aléatoire) Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire de dérive μ: $X_t = \mu + X_{t-1} + Z_t$ pour tout $t \geq 1$, où $X_0 = 0$ et où $(Z_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est un bruit blanc fort.

1. Calculer la fonction d'autocovariance γ_X de X. Est-ce que X est stationnaire?
2. Le processus $(\Delta X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est-il stationnaire?

Exercice 3 (Somme de processus stationnaires) Soient $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus stationnaires, décorrélés (c'est-à-dire que $\mathrm{cov}(X_t, Y_s) = 0$ pour tous s, t). Montrer que le processus $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par $Z_t = X_t + Y_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ est stationnaire, et exprimer son autocovariance en fonction de celles de X et de Y.

Exercice 4 (Stationnarité de processus) Trouver les processus stationnaires parmi les processus suivants:

1. $X_t = Z_t$ si t est pair, et $X_t = Z_t + 1$ si t est impair, avec $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire;
2. $X_t = Z_1 + \cdots + Z_t$ où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort;
3. $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et $\theta \in \mathbb{R}$ une constante;
4. $X_t = Z_t Z_{t-1}$ où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort;
5. $Y_t = (-1)^t Z_t$ et $X_t = Y_t + Z_t$ où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort.

Exercice 5 (Processus harmonique) Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus défini pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$ où A et B sont des variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle et de variance σ^2, et où $\theta \in \mathbb{R}$ est une constante. Le processus X est-il stationnaire ? Calculer sa fonction d'autocovariance.

Exercice 6 (Loi des grands nombres) Soit (X_t) un processus stationnaire de moyenne μ et de fonction d'autocovariance γ. On suppose que $\lim_{h\to\infty} \gamma(h) = 0$ (on dit que le processus est décorrélé à l'infini). Montrer que la limite dans L^2 de $\displaystyle\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t$ est égale à μ.

Exercice 7 (Dérivée discrète, tendance et moyenne mobile) On note Δ l'opérateur de dérivée discrète, qui à un processus (X_t) associe le processus (ΔX_t) défini par $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et M l'opérateur de moyenne mobile, qui à un processus (X_t) associe le processus (MX_t) défini par $MX_t = \frac{1}{3}(X_{t-1} + X_t + X_{t+1})$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que, si (X_t) est un processus stationnaire, alors (ΔX_t) et (MX_t) sont également stationnaires et exprimer leur autocovariance en fonction de celle de (X_t).

2. On dit que (X_t) est un processus avec tendance polynômiale d'ordre d (où $d \in \mathbb{N}$) s'il existe un polynôme P de degré d et un processus stationnaire (U_t) tels que $X_t = P(t) + U_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que, si (X_t) est un processus avec tendance polynômiale d'ordre d (où $d \in \mathbb{N}^*$), alors (ΔX_t) est un processus avec tendance polynômiale d'ordre $d - 1$.

3. On suppose que (X_t) est de la forme $X_t = P(t) + S(t) + U_t$, où P est un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$, $S : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est une fonction $R-$périodique (avec $R \in \mathbb{N}^*$) et (U_t) est un processus stationnaire. Donner une opération simple transformant (X_t) en un processus stationnaire.

4. Quel est l'effet de M sur un processus avec tendance affine (=tendance polynômiale d'ordre 1) ? Et sur un processus de la forme $X_t = S(t) + U_t$, où $S : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est une fonction périodique de période 2 et (U_t) est stationnaire ?

5. Donner une construction analogue à M qui élimine les suites périodiques d'ordre 3 en laissant les polynômes de degré 2 invariants.

Exercice 8 (Propriété de la fonction d'autocovariance)

1. Montrer que la fonction γ définie par $\gamma(0) = 1$, $\gamma(h) = \rho$ pour $|h| = 1$ et $\gamma(h) = 0$ sinon, est une fonction d'autocovariance ssi $|\rho| \leq 1/2$. Donner un exemple de processus stationnaire gaussien ayant une telle fonction d'autocovariance.

2. Même question pour la fonction γ définie par $\gamma(0) = 1$ et $\gamma(h) = \rho$ si $h \neq 0$, où $0 \leq \rho \leq 1$.

3. Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions d'autocovariance d'un processus stationnaire ?

   (a) $\gamma(h) = 1$ si $h = 0$ et $\gamma(h) = 1/h$ si $h \neq 0$;

   (b) $\gamma(h) = 1 + \cos(h\pi/2)$;

   (c) $\gamma(h) = (-1)^{|h|}$.